UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010
Übungsblatt 9, Ausgabe 14. 06. 2010
Abgabe am 21. und 23. 06. 2010
Besprechung in den Übungen am 23. und 25. 06. 2010

Aufgabe 47 (E): Zwei-Zustands-System mit Kopplung (schriftlich - 6 Punkte)

Bezüglich zweier orthornormierter Basiszustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ zu den Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 sei der Hamiltonoperator als die Matrix $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ mit ε_1, ε_2 reell und δ komplex gegeben.

a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen von H, d.h. die Lösungen $E_\pm$ und $\varphi_\pm$ von $H\varphi_\pm = E_\pm\varphi_\pm$. $E_\pm$ erhalten Sie als Eigenwerte der Matrix H. $\varphi_\pm$ sind dann darzustellen als $\varphi_+ = a_{+1}\Psi_1 + a_{+2}\Psi_2$ bzw. $\varphi_- = a_{-1}\Psi_1 + a_{-2}\Psi_2$, also so, dass die Vektoren aus den zu ermittelnden komplexen Koeffizienten a_{ij} Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix} = E_+ \begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix} = E_- \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}$$

Führen Sie zwei Winkel θ und ϕ ein als $\tan\theta = 2|\delta|/(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ und $\delta^* = |\delta|e^{i\phi}$. (In $a_{\pm 1,2}$ sollten am Ende Winkelfunktionen von $\theta/2$ stehen.) Bestimmen Sie die a_{ij} so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}$ und normiert sind.

b) Nehmen Sie $\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ als Parameter und zeichnen Sie in ein Diagramm die folgenden vier Funktionen: $f_1(\Delta) = \varepsilon_1$, $f_2(\Delta) = \varepsilon_2$, $f_3(\Delta) = E_+$, $f_4(\Delta) = E_-$. Für $|\delta|$ dürfen Sie einen beliebigen festen Wert nehmen. Bei welchen Energiewert liegt die Symmetrieachse der Abbildung?

c) Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{pmatrix} a_{+1}^* & a_{+2}^* \\ a_{-1}^* & a_{-2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{+1} & a_{-1} \\ a_{+2} & a_{-2} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. (Dies stellt eine unitäre Transformation dar.)

Aufgabe 48 (E): Rekonstruktion von Zuständen

Eine vollständige Orthonormalbasis eines Systems werde aus den beiden Funktionen φ_1 und φ_2 gebildet. Ein Zustand Ψ ist dann als $\Psi = a\varphi_1 + b\varphi_2$ darstellbar, also durch den Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ anzugeben (a und b sind komplexe Zahlen). Der Erwartungswert eines Operators L berechnet sich, wie Sie wissen, als $\langle\Psi| L |\Psi\rangle$.
Das System befinde sich in einem Zustand Ψ, für den die Erwartungswerte der - hier als Matrizen angegebenen - Operatoren

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle A\rangle = 2$, $\langle B\rangle = \frac{1}{2}$ und $\langle C\rangle = 0$ betragen.
Finden Sie den Zustand Ψ, also den normierten Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn die Erwartungswerte $\langle A\rangle = 3$, $\langle B\rangle = 1$ und $\langle C\rangle = 0$ lauten.

Aufgabe 49 (E): Projektoren und Messung von Wahrscheinlichkeiten

Eine Orthonormalbasis eines Zweizustandssystems bestehe aus den Zuständen $|z+\rangle$ und $|z-\rangle$ ("z"-Basis). Eine Wellenfunktion sei als

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|z+\rangle + \beta\,|z-\rangle \qquad \alpha,\ \beta \text{ komplex},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

gegeben. Eine Messung in der z-Basis mit dem Ergebnis, dass der $|z+\rangle$-Zustand vorliegt, also ein $|z+\rangle$-Filter, projiziert $|\Psi\rangle$ in den Zustand $|z+\rangle\langle z+|\Psi\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $|\langle z+|\Psi\rangle|^2$. Für eine Messung mit dem Ergebnis $|z-\rangle$ gilt Analoges.
Eine andere Orthonormalbasis ("v"-Basis) besteht aus den Zuständen $|v+\rangle$ und $|v-\rangle$, die mit den z-Zuständen wie folgt zusammenhängen:

$$|v+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|z+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|z-\rangle \qquad \text{und} \qquad |v-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\,|z+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|z-\rangle\,.$$

(θ ist ein fester Parameter.)

a) Es werde der Zustand bezüglich z gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den $|z+\rangle$-, mit welcher den $|z-\rangle$-Zustand?

b) Stellen Sie zunächst Ψ in der v-Basis dar. An Ψ werde der Zustand bezüglich v gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den $|v+\rangle$-, mit welcher den $|v-\rangle$-Zustand?

c) An Teilchen im Ausgangszustand Ψ werde zuerst der Zustand in der z-Basis, danach der in der v-Basis gemessen. Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit misst man $|v+\rangle$ bzw. $|v-\rangle$, wenn zuvor $|z+\rangle$ gemessen wurde?

d) Ausgangszustand sei wieder jeweils Ψ. In einem Experiment wird nur der Zustand bezüglich v gemessen, in einem anderen zuerst der Zustand bezüglich z und danach der bezüglich v. In dieser Teilaufgabe habe θ den konkreten Zahlenwert 90°. Auch wenn wir es im zweiten Experiment wissen, wollen wir nur die zwei Fälle unterscheiden, ob in der v-Messung $|v+\rangle$ oder $|v-\rangle$ ermittelt wurde, egal, ob die z-Messung vorher $|z+\rangle$ oder $|z-\rangle$ ergeben hatte. Erhält man dieselben Wahrscheinlichkeiten dafür $|v+\rangle$ bzw. $|v-\rangle$ zu messen, wenn vorher der Zustand bezüglich z gemessen wurde, wie wenn ausschließlich der Zustand bezüglich v gemessen wird?

Aufgabe 50(T): Lineare Operatoren **(schriftlich - 10 Punkte)**

a) (2 Punkte) Bei gegebener Orthonormalbasis $|\psi_n\rangle$ (mit $n = 1, .., N$, N-Dimension des Hilbert-Raumes) lässt sich ein linearer Operator A als Matrix darstellen, durch

$$(A_{ij}) = \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Spur (=Summe der Diagonalelemente) der Matrixdarstellung von linearen Operatoren (in einem Hilbert-Raum mit abzählbarer Orthonormalbasis) unabhängig von der gewählten Basis ist.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie für beliebige lineare Operatoren A und B (mit entsprechenden Definitionsbereichen) eines geeigneten Hilbert-Raumes und $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$

c) (4 Punkte) Als Beispiel für unbeschränkte Operatoren betrachten wir den Impulsoperator in der Ortsdarstellung (in einer Dimension) $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$. Dieser ist definiert auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen $\psi(x)$ für $x \in [a, b]$. Seine Eigenwertgleichung lautet

$$\hat{p}\, \psi(x) = -i\hbar\partial_x \psi(x) = p\, \psi(x).$$

- Zeigen Sie mit dem Skalarprodukt $\langle \phi |\, \psi \rangle = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)\, \mathrm{d}x$ und $|p\psi\rangle = p|\psi\rangle$, dass
  a) $\hat{p}$ i.A. nicht symmetrisch ($\langle \phi | p\psi \rangle = \langle p\phi | \psi \rangle$) ist
  b) die Eigenwerte nicht reell sein müssen

  falls keine Randbedingungen an die $\psi(x)$ gestellt werden.

- Zeigen Sie, dass im Grenzfall $a \to -\infty$, $b \to \infty$ und der Randbedingung $\lim_{x\to\infty} |\psi(x)| = \lim_{x\to-\infty} |\psi(x)| < \infty$ der Operator $\hat{p}$ symmetrisch wird und damit nur reelle Eigenwerte besitzt.

  Hinweis: Betrachten Sie $\langle \psi | \hat{p}\psi \rangle$. Bekanntermaßen sind die Lösungen nur durch eine δ-Funktion normierbar.

- Zeigen Sie, dass für $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ($|a|, |b| < \infty$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist, aber keine Eigenfunktionen mit der Randbedingung besitzt. Dieser Operator ist also nicht selbstadjungiert, da der Definitionsbereich unnötig eingeschränkt wird.

- Zeigen Sie, dass für periodische Randbedingungen ($\alpha\psi(a) = \psi(b)$ mit $|\alpha| = 1$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist und seine Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis bilden. Dieser Operator ist damit selbstadjungiert.

Aufgabe 51(T): Der Vektorraum L^2

a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathrm{d}\mathbf{r} < \infty$) einen Vektorraum (genannt $L^2(\mathbb{C})$) über dem Körper der komplexen Zahlen bilden.

b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

für alle Elemente von $L^2(\mathbb{C})$ existiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $|\phi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 2|\phi(\mathbf{r})||\psi(\mathbf{r})|$.

Aufgabe 52(T): Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Betrachten Sie den Hilbert-Raum $L^2([-1,1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.

a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome $(1, x, x^2, x^3, ...)$ die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.

b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ mit der Normierung

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Normieren Sie die Polynome aus a) um die $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt.

c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der n-ten Ordnung, d.h. $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1 x + b_1$, $f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$, die Polynome $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.