UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010

Übungsblatt 10, Ausgabe 21. 06. 2010
Abgabe am 28. und 30. 06. 2010
Besprechung in den Übungen am 30. 06. und 02. 07. 2010

Aufgabe 53 (E): Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren (schriftlich - 7 Punkte)

a) Stellen Sie sich als Vorbereitung alle Elemente der Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial \vartheta/\partial x & \partial \vartheta/\partial y & \partial \vartheta/\partial z \\ \partial \varphi/\partial x & \partial \varphi/\partial y & \partial \varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

zusammen. (r, ϑ, φ) bedeuten Kugel-, (x, y, z) kartesische Koordinaten.

b) Drücken Sie jetzt $L_x = -i\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right)$, $L_y = -i\hbar \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right)$ und $L_z = -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right)$ in Kugelkoordinaten aus. Benutzen Sie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ etc.
Zeigen Sie weiterhin, dass mit den Definitionen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ gilt:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \text{und} \quad L_- = -\hbar e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sollte sich schon vorher ergeben haben.

c) Überprüfen Sie durch Einsetzen für L_+ und L_-, dass $\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$ dem Drehimpulsbetrag $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ entspricht. Benutzen Sie hierbei *nicht* bereits eine Darstellung der Produkte L_+L_- und L_-L_+ durch L^2 und L_z, wie sie sie vielleicht aus der Vorlesung kennen, sondern lediglich die Definitionen aus b).
Mit den expliziten Formel aus b) zeigen Sie nun weiter, dass gilt:

$$\frac{L^2}{\hbar^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

d) $F_l^l(\vartheta, \varphi) = c_l e^{il\varphi}(\sin \vartheta)^l$. c_l ist die Normierungskonstante, $c_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$. F_l^{m-1} ergibt sich aus F_l^m als

$$F_l^{m-1} = (\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)})^{-1} L_- F_l^m.$$

Es gibt $2l + 1$ mögliche Werte für m. m läuft von $-l$ bis l. (Was hier F genannt ist, sind die Kugelflächenfunktionen, auch häufig mit Y bezeichnet.) Berechnen Sie mit der angegebenen Rekursionsformal explizit alle Funktionen F_l^m für $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$.

Aufgabe 54 (E): Dipolmatrixelemente im H-Atom

a) Die einfachsten Wasserstoffwellenfunktionen $\Psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi)$ lauten:

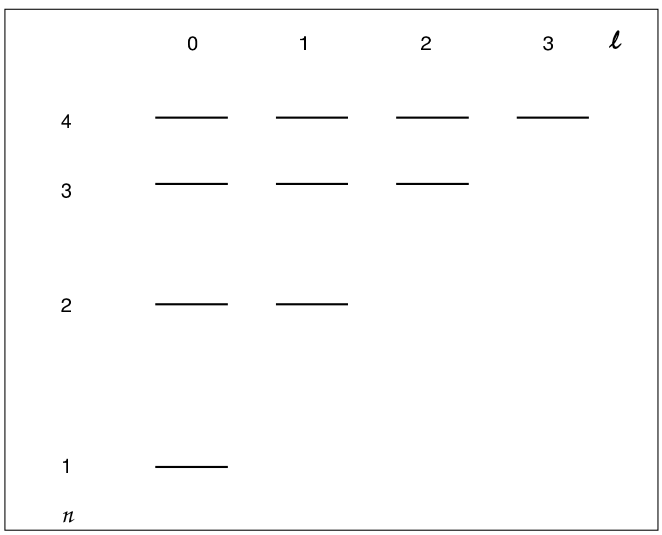
$$\Psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}, \quad \Psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}(2-\frac{r}{a})e^{-r/(2a)} \quad \text{und} \quad \Psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}\frac{r}{a}e^{-r/(2a)}\cos\vartheta.$$

a ist der Bohrsche Radius. Berechnen Sie das Dipolmatrixelement

$$\mathbf{D} = \int d^3\mathbf{r}\ \Psi_A^*\ e\mathbf{r}\ \Psi_B = \int_0^\infty r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta\ d\vartheta\ \Psi_A^*(r,\vartheta,\varphi)\ e \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \Psi_B(r,\vartheta,\varphi)$$

für die Fälle: i) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{1,0,0}$, ii) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{2,0,0}$, iii) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{2,1,0}$. (Das e in der **D**-Formel bedeutet die Elementarladung.)

b) Nehmen Sie die Ergebnisse von a) als Bestätigung dafür, dass Dipolübergänge zwischen Niveaus beliebiger (hier verschiedener) n erlaubt sind, aber die l sich genau um eins unterscheiden müssen, wobei es egal ist, ob das Ausgangs- oder das Endniveau das höhere l hat. In unserem Wasserstoffmodell (bis jetzt ohne relativistische Korrektur und Spin) gibt es zu jedem n (angefangen mit 1) n entartete Zustände mit $l = 0, \ldots, n-1$. Eine Aufspaltung bzw. Entartung bezüglich m betrachten wir in dieser Teilaufgabe nicht (Wir haben in a) nur Ψ mit $m = 0$ genommen; also folgern wir, dass es erlaubte Dipolübergänge gibt, wenn m Null war und bleibt, aber andere Fälle haben gerade (noch) nicht gepüft. Sie können sich auch in dieser Teilaufgabe denken, dass zu jedem l der Zustand mit $m = 0$ als ausgewählter gemeint ist.)



Tragen Sie in dem Schema, dass Zustände bis $n = 4$ zeigt, alle erlaubten Dipolübergänge durch Verbinden der entsprechenden Balken ein.

Aufgabe 55 (E): Ionisierende Strahlung und deren Nachweis

a) Aus welchen Teilchen welcher Mindestenergie besteht ionisierende Strahlung?
Aus welchen Quellen stammt sie?

b) Erklären Sie Aufbau und Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs.

c) Bei einem Geiger-Müller-Zählrohr betragen die Länge des Drahtes bzw. des Zylinders 20cm. Der Radius des Drahtes ist 30μm, der des Zylinders, der die Außenwand bildet, 1,5cm. Die angelegte Spannung zwischen Anoden-Draht und Außenwand beträgt 300V, die Kapazität zwischen Anoden-Draht und Außenwand sei 0,167pF.
Geben Sie die elektrische Feldstärke und das elektrostatische Potential als Funktion der radialen Koordinate an. Ignorieren Sie Stöße und Ionisationslawinen. Nehmen Sie an, ein an der Außenwand erzeugtes Elektron (Anfangsgeschwindigkeit Null) wird im Vakuum Richtung Anodendraht beschleunigt. Errechnen Sie numerisch in welcher Zeit es den Draht erreicht.

Aufgabe 56(T): Kohärente Zustände **(schriftlich - 8 Punkte)**

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = Ce^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$ gebildet werden können.
Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $|\psi_\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. Vermuten Sie, dass a^+ Eigenfunktionen besitzt?

b) (2 Punkte) Welches $C \in \mathbb{R}$ normiert $|\psi_\alpha\rangle$ auf 1? Mit diesem C kann $|\psi_\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$. Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle n\rangle = \langle\psi_\alpha|a^+a|\psi_\alpha\rangle$ aus.

c) (1 Punkt) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\psi_\alpha(t)\rangle$, wenn $|\psi_\alpha(t=0)\rangle = |\psi_\alpha\rangle$?
Hinweis: Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\psi_\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x\rangle(t) = \langle\psi_\alpha(t)|x|\psi_\alpha(t)\rangle.$$

Hinweis: Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x\rangle(t) = 2\lambda|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$.

e) (2 Punkte) Mit Hilfe von $\langle x^2\rangle(t) = \lambda^2(1+4|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta))$ und $\langle p^2\rangle(t) = \frac{\hbar^2}{4\lambda^2}(1+4|\alpha|^2\sin^2(\omega t-\delta))$ berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle\psi_\alpha(t)|(x-\langle x\rangle(t))^2|\psi_\alpha(t)\rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ unter Ausnutzung von $\langle p\rangle = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle$ (Ehrenfest-Theorem).
Zeigen Sie damit, dass $|\psi_\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d.h.

$$\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$

Aufgabe 57(T): Dichteoperator

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dichteoperators definiert durch

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

wobei $\{|\psi_i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet und $\sum_i p_i = 1$ (mit $0 \leq p_i \leq 1$).

- $\rho^\dagger = \rho$, d.h. ρ hermitesch
- $\rho \geq 0$, d.h. ρ positiv semidefinit
- $\mathrm{tr}(\rho) = 1$
- $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ (reiner Zustand) und $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$ (gemischter Zustand)
- $\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H]$ (*von-Neumann-Gleichung*)

Aufgabe 58(T): Das Wasserstoffatom

Die Schrödingergleichung für ein Elektron im Coulombpotential beschreibt das nichtrelativistische Wasserstoffatom und lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}).$$

a) Berechnen Sie den Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ in Kugelkoordinaten und zeigen Sie, dass er sich mit dem Drehimpulsoperator L schreiben lässt als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2}.$$

Hinweis: Die Transformation auf Kugelkoordinaten und L^2 wurde bereits in der Aufgabe 53 (Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators) berechnet.

b) Mit einem Produktansatz $\Psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ und der bekannten Eigenwertgleichung $L^2 Y_l^m(\vartheta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ leiten Sie eine Differentialgleichung für den radialen Anteil $R(r)$ her.

c) Führen Sie die Substitution $R(r) = u(r)/r$ durch, um auf die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{a_0 r}\right)u(r) = -\frac{2m}{\hbar^2}E_{n,l}u(r)$$

zu kommen, wobei $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ der Bohrschen Radius ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist mit Hilfe der Polynommethode möglich (vergleiche harmonischer Oszillator) und führt auf die *Laguerre-Polynome*.