Universität Konstanz
Fachbereich Physik
Dr. Peter Keim

Ausgabedatum: 29.01.2015
Besprechung: 05./06.02.2015

ÜbungsgruppenleiterInnen: Mathias Altenburg, Richard Rau, Dirk Ropers, Wolfgang Scheffer, Moritz Schlötter, Annika Schoe, Bernd Illing, Alexa Herter

Übungen zu Experimentalphysik I für Biologinnen und Biologen

Blatt 13

Aufgabe 1: Taylorreihen

Mit Hilfe der Taylorreihe lassen sich komplizierte Funktionen in den Naturwissenschaften auf einfache Weise nähern und untersuchen. Mit dieser Methode ist es möglich Funktionen durch eine Summe von Polynomen darzustellen. Die allgemeine Formel für die Entwicklung einer Funktion an der Stelle x_0 in eine Taylorreihe lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... \tag{1}$$

Dies bedeutet also, dass bei bekannten Werten der Funktion und deren Ableitungen an der Stelle x_0, die gesamte Funktion approximiert werden kann. Hierzu muss diese natürlich beliebig oft stetig differenzierbar sein. Dies wollen wir nun am Beispiel der e-Funktion deutlicher machen.

a) Skizieren oder plotten Sie die e-Funktion $f(x) = e^x$!
b) Stellen Sie nun die Funktion in einer Taylorreihe dar, indem sie um den Punkt $x_0 = 0$ entwickeln! Brechen Sie die Entwicklung nach dem 4. Glied der Taylorreihe ab!
c) Skizzieren oder plotten Sie nun nacheinander die Taylorreihe so, dass Sie zuerst nur das erste Glied zeichnen, danach die ersten zwei, danach die ersten drei! Vergleichen Sie schrittweise Ihre geplotteten Funktionen mit der skizierten e-Funktion! Fällt Ihnen etwas auf?
d) Erkundigen Sie sich mit Hilfe von Wikipedia, wie die ersten drei Glieder der Cosinus und Sinus Funktion in der Taylorreihe um $x_0 = 0$ aussehen und bilden die Summe der Funktion $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$! Vergleichen Sie nun diese mit der Taylorreihe der Exponentialfunktion! Könnte es möglich sein, dass man die e-Funktion mittels der beiden Funktionen darstellen kann?
e) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$

Aufgabe 2: Anfangswertproblem in der Physik

Die Differentialgleichung eines %harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \tag{2}$$

Zu Beginn der Schwingung soll die Auslenkung des Oszillators Null sein und seine Geschwindigkeit maximal. Zudem soll nach einem viertel der Schwingungsdauer die Amplitude maximal sein und die Geschwindigkeit Null betragen. Es gilt $x(0) = 0, v(0) = v_0, x(\frac{T}{4}) = A_0$ und $v(\frac{T}{4}) = 0$ Mit Hilfe dieser Werte ist es uns möglich die Funktion unserer Bewegungsform vollständig zu bestimmen.

a) Lösen Sie die Gleichung mit dem Ansatz $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$! Bestimmen Sie mit Hilfe der oben gegeben Werte die Konstanten A und ϕ! In diesem Fall ist A die Amplitude und ϕ die Phasenverschiebung.
b) Wiederholen Sie nun Aufgabenteil a) mit dem Ansatz $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$!
c) Vergleichen Sie nun beide Lösungen! Was passiert wenn man die Sinus-, bzw. Cosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ verschiebt?
d) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem für den Fall das $x(0) = A_0$ und $v(0) = 0$ ist!
e) Was passiert, wenn $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$ ist?

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

a) Bei einer harmonischen Schwingung ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung.
b) Die Eigenfrequenz eines mathematischen Pendels ist abhängig von der Masse des schwingenden Körpers
c) Eine Pendeluhr, die in Höhe des Meeresspiegels genau geht, läuft in größerer Höhe zu schnell.
d) Bei einer linear gedämpften Schwingung ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit.
e) Die Frequenz einer gedämpften Schwingung ist größer als im ungedämpften Fall.
f) Beim aperiodischen Grenzfall findet kein Nulldurchgang statt.